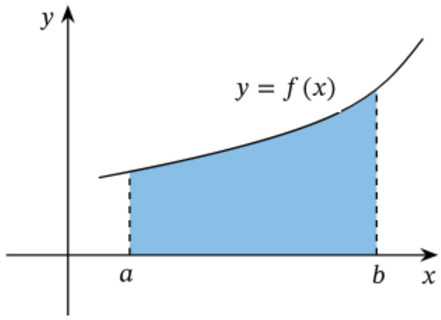
Pavadinimas. Integralų taikymas sukinių tūriams skaičiuoti
Dalykas. Matematika
Klasė 4 G išplėstinis kursas
Pasiekimų sritis. Apima visas tris pasiekimų sritis: gilus supratimas ir argumentavimas A1, A2, A3; matematinis komunikavimas B1, B2; problemų sprendimas C1, C2, C3.
Mokymo(si) turinio tema Integralų taikymai
Ilgalaikio plano dalis (nurodoma kokios temos/-ų prieš tai buvo mokomasi): Pirmykštė funkcija ir integralas. Kreivinės trapecijos plotas.
Valandų skaičius nurodytas ilgalaikiame plane 3
Mokymosi uždaviniai (pamatuojami) ir vertinimo kriterijai: 1. Gebėti tinkamai ir tikslingai vartoti matematines sąvokas, faktus. 2. Gebėti tinkamai atlikti matematines procedūras susijusias su sukinių tūrių skaičiavimu taikant integralus. 3. Gebėti analizuoti paprastas problemines situacijas ir pasiūlyti modelį problemai išspręsti. 4. Gebėti sukurti logišką ir nuoseklų uždavinio sprendimą.
Galimi mokymo(si) metodai, siūloma veikla: Trijų pamokų konspektas, kurį mokytojai gali naudoti kaip dalijamąją medžiagą.
Siūloma papildoma medžiaga / literatūra / skaitmeninės mokymo priemonės (SMP): Matematika 12 klasei 1 dalis TEV 2003 psl. 136-139. Matematika tau plius Išplėstinis kursas 1 dalis TEV 2012 psl. 128-129.
Reikalingi materialiniai ir technologiniai ištekliai: Kompiuteris, kopijavimo aparatas, jei naudojama kaip dalijamoji medžiaga, projektorius.
Medžiagą parengė matematikos mokytojos metodininkės: Jurga Deveikytė, Lina Stasiūnaitė

Sukinių tūriai

Jau mokate naudodamiesi integralais apskaičiuoti kreivinių figūrų plotus. Integralai naudojami ir skaičiuojant sukinių tūrius.

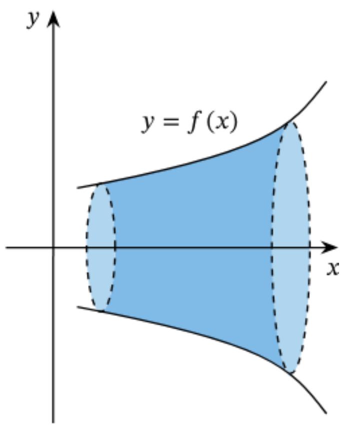
Kreivinės trapecijos, kurią apriboja funkcijos $y = f(x)$ grafikas ($f(x) \geq 0$), abscisių ašis $y = 0$ ir tiesės $x = a$, $x = b$, $(a < b)$



plotą apskaičiuojame naudodami formulę:

$$S = \int_a^b f(x)dx.$$

Sukdami šią kreivinę trapeciją apie Ox ašį, gauname kūną, kuris vadinamas sukiniu.

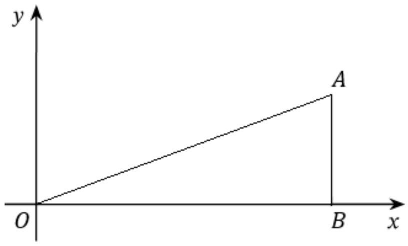


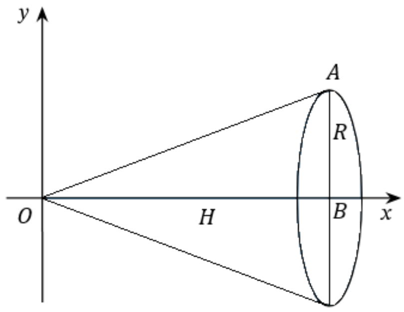
Tokio sukinio tūris apskaičiuojamas naudojantis formule

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)dx.$$

Įsitikinkime, kad naudojantis pateiktąja formule galime gauti kūgio, kurio pagrindo spindulys lygus R, o aukštinė – H, jau žinomą formulę $V_{kūgio} = \frac{1}{3}\pi R^2 H$.

Kūgį gausime paveiksle pavaizduotą statųjį trikampį OAB sukdami apie Ox ašį.





Tiesės, einančios per taškus $O(0;0)$ ir $A(H;R)$, lygtis yra $y=\frac{R}{H}x$. Sukinio, gauto sukant apie Ox ašį kreivinę trapeciją, apribotą tiesėmis $y=\frac{R}{H}x$, $y=H$ ir $y=0$, tūris lygus:

$$V=\pi\int_0^H\left(\frac{R}{H}x\right)^2dx=\pi\cdot\frac{R^2}{H^2}\int_0^H x^2dx=\pi\cdot\frac{R^2}{H^2}\left(\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^H=\pi\cdot\frac{R^2}{H^2}\cdot\frac{H^3}{3}=\pi\cdot\frac{R^2H}{3}=\frac{1}{3}\pi R^2H.$$

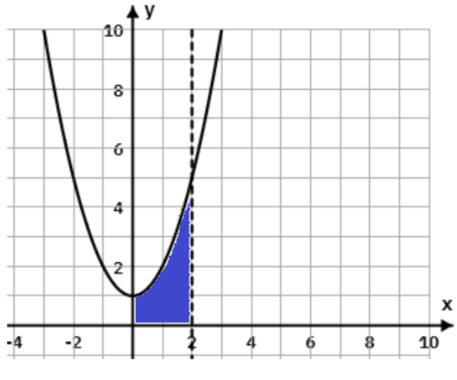
Panagrinėkime keletą pavyzdžių.

1 pavyzdys.

Apskaičiuokime tūrį sukinio, gauto apie abscisių ašį sukant kreivinę trapeciją, apribotą kreive $y=f(x)=x^2+1$ ir tiesėmis $x=0,\ x=2,\ y=0$.

Sprendimas.

Nubraižykime kreivinę trapeciją:



Sukant ją apie abscisių ašį gausime sukinį, kurio tūrį galime apskaičiuoti pagal formulę

$$V=\pi\int_a^b f^2(x)dx.$$

$$V=\pi\int_0^2(x^2+1)^2dx=\pi\int_0^2(x^4+2x^2+1)dx=\pi\left(\frac{x^5}{5}+2\cdot\frac{x^3}{3}+x\right)\Big|_0^2=\pi\left(\frac{2^5}{5}+2\cdot\frac{2^3}{3}+2\right)=$$

$$=\frac{206}{15}\pi.$$

Atsakymas: $\frac{206}{15}\pi$.

2 pavyzdys.

Apskaičiuokime tūrį sukinio, kuris gaunamas sukant apie abscisių ašį figūrą, apribotą kreivėmis

$$y = f(x) = 2 - x \text{ ir } y = g(x) = x^2.$$

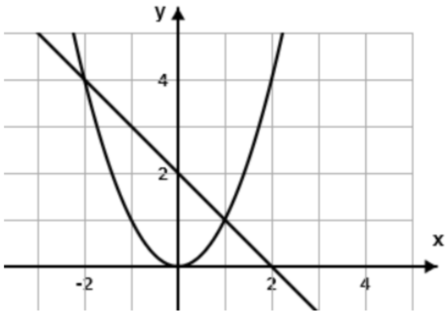
Sprendimas:

Raskime šių funkcijų grafikų susikirtimo taškų abscises:

$$2 - x = x^2$$

$$x_1 = -2;\ x_2 = 1$$

Nubraižykime funkcijų scheminius grafikus:



Jei skaičiuotume plotą figūros, apribotos funkcijų $y = f(x)$ ir $y = g(x)$ grafikais, tai iš kreivinės trapecijos, apribotos kreivėmis $y = f(x),\ x = -2,\ x = 1,\ y = 0$, ploto atimtume plotą kreivinės trapecijos, apribotos kreivėmis $y = g(x),\ x = -2,\ x = 1$. Tai yra:

$$S = \int_{-2}^{1} f(x)dx - \int_{-2}^{1} g(x)dx = \int_{-2}^{1} \big(f(x) - g(x)\big)dx.$$

Kadangi šią figūrą suksime apie abscisių ašį, tai gauto sukinio tūrį skaičiuosime iš vieno sukinio (gauto sukant kreivinę trapeciją, apribotą kreivėmis $y = f(x), x = -2, x = 1, y = 0$) tūrio, atimdami kito sukinio (gauto sukant kreivinę trapeciją, apribotą kreivėmis $y = g(x),\ x = -2$, $x = 1$) tūrį. Tai yra:

$$V = \pi \int_{-2}^{1} f^2(x)dx - \pi \int_{-2}^{1} g^2(x)dx = \pi \int_{-2}^{1} \big(f^2(x) - g^2(x)\big)dx.$$

$$V = \pi \int_{-2}^{1} ((2 - x)^2 - (x^2)^2)dx = \pi \int_{-2}^{1} (4 - 4x + x^2 - x^4)dx = \pi \left(4x - 4 \cdot \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_{-2}^{1} =$$

$$= \pi \left(4 \cdot 1 - 2 \cdot 1^2 + \frac{1^3}{3} - \frac{1^5}{5} - (4 \cdot (-2) - 2 \cdot (-2)^2 + \frac{(-2)^3}{3} - \frac{(-2)^5}{5}\right) = \frac{72}{5}\pi.$$

Atsakymas: $\frac{72}{5}\pi$.

Uždaviniai

1. Pagal formulę $V = \pi \int_a^b f^2(x)dx$, kai $f(x) = 0{,}5x,\ a = 0,\ b = 4$, apskaičiavę sukinio tūrį gausime

   A $\frac{16}{3}$ B $\frac{32\pi}{3}$ C $\frac{16\pi}{3}$ D 2π

2. Kurio kūno nepavyktų gauti, sukant kreivinę trapeciją apie Ox ašį:

   A Kūgio B Kubo C Ritinio D Rutulio

3. Pavaizduokite kūną, kurio tūris užrašytas integralu:

   A $\pi \int_2^3 x^2 dx;$ B $\pi \int_0^1 x^4\, dx;$

   C $\pi \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} sin^2 x dx;$ D $\pi \int_5^9 (x-5)dx.$

4. Apskaičiuokite tūrį sukinio, gauto apie abscisių ašį sukant kreivinę trapeciją, apribotą kreivėmis:

   a) $y = x^2 - 1,\ x = -1,\ x = 1,\ y = 0;$

   b) $y = x,\ x = 0,\ x = 5,\ y = 0;$

   c) $y = (2 + x)^2,\ x = 0,\ x = 2,\ y = 0;$

   d) $y = -\frac{4}{x},\ x = 2,\ x = 4,\ y = 0;$

   e) $y = \sqrt{cosx},\ x = -\frac{\pi}{2},\ x = 0,\ y = 0;$

   f) $y = \sqrt{x},\ x = 0,\ x = 9,\ y = 0.$

5. Sukinio, gaunamo apie abscisių ašį sukant kreivinę trapeciją, apribotą tiesėmis $y = x + 1$ $x = 0,\ x = 3,\ y = 0$, tūris lygus:

   A 12π B $\frac{21}{3}\pi$ C 21π D 27π

6. Sukinio, gauto sukant apie abscisių ašį kreivinę trapeciją, apribotą funkcijos $y = f(x)$ grafiku, Ox ašimi ir tiesėmis $x = 0,\ x = 2$, tūris lygus integralui $\pi \int_0^2 x^6 dx.$ Tai $f(x) =$

   A x^6 B x^4 C x^3 D x^2

7. Sukinio tūris užrašytas integralu $\int_0^4 \pi x dx$. Koordinačių plokštumoje pavaizduokite kreivinę trapeciją, kurią sukant apie Ox ašį gaunamas šis sukinys.

8. Naudodamiesi sukinio tūrio formule, įrodykite, kad $V_{rutulio} = \frac{4}{3}\pi R^3$, čia $R -$ spindulio ilgis.

9. Kreivėmis $y = f(x)$ ir $y = g(x)$ ir tiesėmis $x = a,\ x = b\ (a < b,\ f(x) \geq g(x) \geq 0)$ apribota figūra sukama apie Ox ašį. Gauto sukinio tūris lygus integralui

A $\quad \pi \int_a^b (f(x) - g(x))^2\, dx$

B $\quad \int_a^b (f^2(x) - g^2(x))dx$

C $\quad \pi \int_a^b (f^2(x) - g^2(x))dx$

D $\quad \pi \int_a^b (f(x) - g(x))dx$

10. Raskite tūrį sukinio, gauto sukant apie abscisių ašį figūrą, apribotą kreivėmis:

a) $y = x^2,\ y = 2x;$

b) $y = x^3,\ y = x;$

c) $y = x^3,\ y = x^2.$

11. Duota funkcija $y = f(x) = \frac{4}{x} + 1.$

11.1. Nubraižykite šios funkcijos scheminį grafiką, kai $x > 0.$

11.2. Pavaizduokite kreivinę trapeciją, apribotą funkcijos $y = f(x)$ grafiku ir tiesėmis $x = 1,\ x = 4,\ y = 0.$

11.3. Apskaičiuokite gautos figūros plotą.

11.4. Ši kreivinė trapecija sukama apie Ox ašį. Įrodykite, kad sukinio tūris yra lygus $\pi(15 + 8\ln 4).$

12. Duota funkcija $y = x^2.$

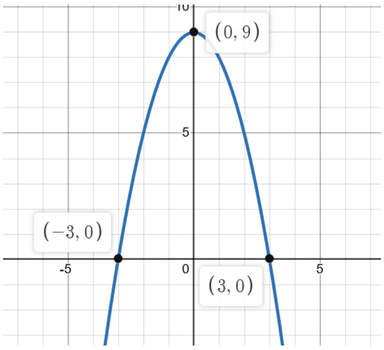
12.1. Nubraižykite šios funkcijos grafiko dalį intervale $x \in [1; 3].$

12.2. Apskaičiuokite kreivinės trapecijos, kurią riboja funkcijos $y = x^2$ grafikas ir tiesės $x = 1,\ x = 3,\ y = 0$ plotą.

12.3. Pavaizduokite sukinį, gaunamą kreivinę trapeciją sukant apie Ox ašį.

12.4. Apskaičiuokite gauto sukinio tūrį.

13. Paveiksle pavaizduotas funkcijos $y = f(x)$ grafikas.



13.1. Užrašykite funkcijos $y = f(x)$ formulę.

13.2. Apskaičiuokite tūrį sukinio, gauto apie Ox ašį sukant figūrą, apribotą funkcijos $y = f(x)$ grafiku ir tiesėmis $x = -3,\ x = 3,\ y = 0$.

14. Duota funkcija $y = f(x) = \sqrt{sinxcosx}$, kai $x \in \left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$:

a) Parodykite, kad $sinxcosx = \frac{1}{2}\sin(2x)$;

b) Įrodykite, kad sukant funkcijos $y = f(x)$ grafiką apie abscisių ašį, gaunamo sukinio tūris lygus $\frac{\pi}{2}$.

15. Kreivinė trapecija, apribota tiesėmis $y = x,\ \ y = 0,\ \ x = 2,\ \ x = a\ (a > 2)$, sukama apie Ox ašį. Kokia turi būti a reikšmė, kad gauto kūno tūris būtų lygus $\frac{56}{3}\pi$?

16. Kreivinė trapecija, apribota funkcijos $y = x^2$ grafiku ir tiesėmis $y = 0, x = 0, x = a\ (a > 0)$, sukama apie Ox ašį. Kokia turi būti a reikšmė, kad gauto kūno tūris būtų lygus $\frac{32}{5}\pi$?